Correction : Indicateurs de réussite

S'approprier

- Une explication qualitative du phénomène physique a été conduite.
- Les grandeurs pertinentes ont été introduites (rayons, vitesses, masse volumique, masses, ...)
- Ces grandeurs ont été correctement évaluées numériquement, avec une unité respectant le système international.

Analyser

- La décomposition des chocs a été conduite.
- L'utilisation de la relation permettant de calculer le coefficient de restitution est correcte.
- L'utilisation justifiée de la conservation de la quantité de mouvement vectorielle a été conduite.
- Les hypothèses du modèle ont été clairement explicitées.

Réaliser

- Les expressions des vitesses après rebonds ont été obtenues de manière littérale.
- Le lien entre vitesse et hauteur a été obtenu (de manière énergétique ou dynamique).
- Les applications numériques sont correctes.

Valider

- Une discussion quant aux hypothèses réalisées est conduite (influence importante de la valeur de e, taille du système, frottements, ...)

Problème n°2 : Éléments de correction

1. Considérons deux balles qui arrivent à la verticale sur le sol. On suppose que le coefficient de restitution balle / sol et et balle / balle sont identiques, de valeur approximative $e = 0{,}8$ d'après les tableaux qui sont communiqués. On va exprimer la conservation de la quantité de mouvement pour exprimer la vitesse relative finale après impact. On décompose en plusieurs parties le mouvement :

   - impact de la balle 1 sur le sol, avec une vitesse $\vec{v}_1 = -v_0\vec{e}_z$; après impact, $\vec{v}'_1 = +ev_0\vec{e}_z$ (le sol est supposé immobile).
   - impact de la balle 2 ($\vec{v}_2 = -v_0\vec{e}_z$) sur la balle 1 : la vitesse relative est donc $\vec{v}_2 - \vec{v}'_1 = (-v_0 - ev_0)\vec{e}_z = -v_0(1+e)\vec{e}_z$; on note v''_1 et v'_2 les vitesses des deux balles après impact.
   - rebond de la balle 2 avec a priori une vitesse importante, d'après ce qui est décrit.

   Pour exprimer la vitesse après rebond, on utilise à nouveau le coefficient de restitution écrit rigoureusement :
   $$e = \frac{v'_2 - v''_1}{v_0(1+e)} \tag{1}$$
   en ne considérant que des vitesses relatives positives, et en supposant que $v'_2 > v''_1$.

   Concernant le système constitué des deux masses, durant leur choc, on néglige l'influence de la force de pesanteur et des frottements fluides, tandis que les forces qui s'exercent entre les deux masses durant le choc sont des forces intérieures. Par conséquent, la quantité de mouvement du système se conserve au cours du choc :
   $$m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}''_1 + m_2\vec{v}'_2 \Longrightarrow m_1ev_0 - m_2v_0 = m_1v''_1 + m_2v'_2 \tag{2}$$
   Il faut donc combiner les deux équations (1) et (2), en éliminant v''_1 :
   $$v''_1 = v'_2 - e(1+e)v_0 \Longrightarrow (em_1 - m_2)v_0 = m_1(v''_2 - e(1+e)v_0) + m_2v'_2 \tag{3}$$
   soit encore $v_0(em_1 + e(1+e)m_1 - m_2) = (m_1+m_2)v'_2$ d'où finalement, après réarrangement :
   $$v'_2 = v_0\frac{e(2+e)m_1 - m_2}{m_1+m_2} \tag{4}$$

2. Suite aux chocs successifs entre les balles, par le même principe qu'à la question précédente, on pourra transférer de la quantité de mouvement à la plus petite balle de par les trois plus grandes. Il faut donc relier les hauteurs au coefficient de restitution et aux masses. On va négliger la taille du jouet devant les hauteurs mises en jeu.

   Connaissant la hauteur $h_0 \gg 15\,\text{cm}$ par hypothèse, on peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour système des 4 masses + tige pour en déduire la vitesse à l'impact, en négligeant la différence de hauteur entre les différentes balles :
   $$\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = W_{\text{poids}} + W_{\text{frotts}} \simeq mgh_0 \Longrightarrow v_0 = \sqrt{2gh_0} \tag{5}$$
   en négligeant tout frottement. De la même manière, on peut exprimer la hauteur h atteinte par la dernière balle, en négligeant la taille du système en utilisant toujours le théorème de l'énergie cinétique entre le point de remontée, à la vitesse v'_4 et le point le plus haut de hauteur h et de vitesse nulle :
   $$0 - \frac{1}{2}m_4(v''_4)^2 = -mgh \Leftrightarrow v'_4 = \sqrt{2gh} \tag{6}$$
   Ainsi la valeur du ratio demandé peut se réécrire selon $\frac{h}{h_0} = \left(\frac{v'_4}{v_0}\right)^2$.

   Déterminons la vitesse de la dernière balle en fonction de v_0. On suppose que les balles ne peuvent s'entrechoquer qu'une seule fois (pas de rebonds multiples). On décompose à nouveau le problème en une succession d'événements :

   - lâcher du jouet d'une hauteur h_0 ;
   - arrivée au sol de l'ensemble des balles à la vitesse $\vec{v}_i = -v_0\vec{e}_z$ avec $i = 1, 2, 3, 4$;
   - choc contre le sol, la grosse balle prend alors la vitesse $\vec{v}'_1 = ev_0\vec{e}_z$;
   - choc successif entre la balle 1 et 2, puis 2 et 3, puis 3 et 4. On peut alors considérer successivement les vitesses $\vec{v}''_1$ et $\vec{v}'_2$, $\vec{v}''_2$ et $\vec{v}'_3$, $\vec{v}''_3$ et $\vec{v}'_4$.
   - éjection de la balle la plus petite.

   Pour calculer chaque vitesse, on utilise le même principe qu'à la question précédente, pour le choc entre la bille i et $i+1$. On écrit les deux équations associées au coefficient de restitution et à la conservation de la quantité de mouvement :
   $$e = \frac{v'_{i+1} - v''_i}{v'_i - (-v_0)} \quad \text{et} \quad m_iv'_i - m_{i+1}v_0 = m_iv''_i + m_{i+1}v'_{i+1} \tag{7}$$
   soit en développant la première équation $v''_i = v'_{i+1} - e(v'_i + v_0)$, que l'on injecte dans la deuxième :
   $$v'_{i+1} = \frac{m_i(1+e)v'_i + (m_ie - m_{i+1})v_0}{m_i + m_{i+1}} \tag{8}$$
   On peut donc calculer successivement v'_2, v'_3 et v'_4 sachant que $v'_1 = ev_0$.

   Il faut donc évaluer les différentes masses pour réaliser l'application numérique. Connaissant la masse totale, on peut supposer que chaque balle est constitué du même matériau de masse volumique ρ. On peut donc effectuer une mesure des rayons :

r_1	r_2	r_3	r_4
1,0 cm	1,5 cm	2,0 cm	2,5 cm

donc $m_{\text{tot}} = \rho \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^4 + r_3^3 + r_4^3)$, il vient $\rho = 0{,}85\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ (cohérent), et on peut donc calculer chaque masse :

m_1	m_2	m_3	m_4
56 g	28 g	12 g	3,6 g

On trouve alors numériquement $v_1' = 0{,}8v_0$, $v_2' = 1{,}16v_0$, $v_3' = 1{,}72v_0$, $v_4' = 2{,}77v_0$, d'où $\frac{h}{h_0} = (2{,}77)^2 = 7{,}7$

Ainsi, pour une chute initiale de 1 m de haut, on aurait donc un bond de 7,7 m. Cela permet également de confirmer l'hypothèse selon laquelle on pouvait négliger la taille du jouet devant les hauteurs mises en jeu. Néanmoins le résultat numérique obtenu est peu fiable dans la mesure ou le coefficient de restitution a été estimé (et n'est pas forcément le même durant le contact balle/sol et balle/balle), les balles ont été supposées identiques, on n'a pas considéré de frottements sur la tige ni de frottements dans l'air (à des vitesses importantes, ce n'est sans doute plus vrai). Par conséquent, il est vraisemblable que l'on ait surestimé le ratio demandé. Il semble néanmoins que l'estimation du coefficient de restitution soit crucial. Par exemple pour $e = 0{,}75$, $h/h_0 = 5{,}6$, et pour $e = 0{,}85$, $h/h_0 = 10{,}3$, soit des écarts importants...