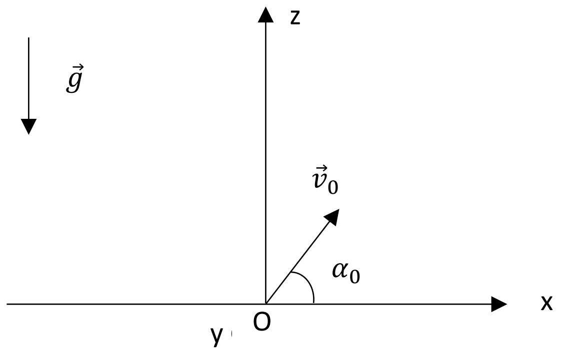
Exercice 1 – Terminale S

1. A t = 0, on lance un projectile M de masse m à partir du point O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α_0 avec l'horizontale (voir figure). On néglige la résistance de l'air.



Pour déterminer la trajectoire du projectile :

1.a. montrer que la trajectoire est plane ;

La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) s'écrit : $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$, où $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ (où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire orienté selon l'axe Ox, et $g > 0$). D'où $\ddot{x} = 0$; $\ddot{y} = 0$; $\ddot{z} = -g$. (1 point)
En intégrant $\ddot{y} = 0$, il vient $\dot{y} = C^{ste} = 0$ (car $\vec{v}_0$ n'a pas de composante selon Oy), d'où $y(t) = C^{ste} = 0$ (car $y(t = 0) = 0$). La trajectoire est donc dans le plan Oxz. (1 point)

1.b. déterminer les coordonnées horizontale $x(t)$ et verticale $z(t)$ du projectile à l'instant t ;

De même en intégrant $\ddot{x} = 0$, il vient $\dot{x} = C^{ste} = v_0\, cos\alpha_0$, d'où $x(t) = v_0\, cos\alpha_0\, t$ (car $x(0) = 0$). (1 point)
Et en intégrant $\ddot{z} = -g$, il vient $\dot{z} = -gt + v_0\, sin\alpha_0$, d'où $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\, sin\alpha_0\, t$ (car $z(0) = 0$). (1 point)

1.c. en déduire une équation de la trajectoire de la forme $z = f(x)$;

On en déduit $t = \frac{x}{v_0\, cos\alpha_0}$, d'où $z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\, cos\alpha_0}\right)^2 + tan\alpha_0\, x$ (1 point)

1.d. Représenter schématiquement la trajectoire pour une valeur quelconque de α_0 et identifier la nature de cette trajectoire.

Tracé d'une trajectoire (1,5 point)
C'est une parabole. (0,5 point)

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points qui peuvent être atteints par le projectile en faisant varier α_0, le module v_0 de sa vitesse initiale, donc son énergie cinétique initiale, étant fixés.

2.a. Soit N le point qu'on cherche à atteindre, de coordonnées X et Z. Ecrire l'équation que doit satisfaire $\tan(\alpha_0)$ pour que le point N soit atteint par le projectile.

Formulaire : $\frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$

Indication : Pour simplifier les équations, on pourra introduire les coordonnées réduites (sans dimension) $X' = \frac{gX}{2v_0^2}$, $Z' = \frac{gZ}{2v_0^2}$ *du point N.*

On doit trouver une valeur de α_0 telle que $Z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{X}{v_0\, cos\alpha_0}\right)^2 + tan\alpha_0\, X$, soit une valeur de $tan\alpha_0$ telle que $Z = -\frac{gX^2}{2v_0^2}(1 + tan^2\alpha_0) + tan\alpha_0\, X$ (en utilisant $\frac{1}{cos^2\alpha_0} = 1 + tan^2\alpha_0$). (2 points)
En multipliant cette relation par $\frac{g}{2v_0^2}$ et en introduisant les coordonnées adimensionnées X', Z' de N telles que $X' = \frac{gX}{2v_0^2}$; $Z' = \frac{gZ}{2v_0^2}$, cette équation devient : $Z' = -X'^2(1 + tan^2\alpha_0) + tan\,\alpha_0\, X'$ (*cette transformation n'est évidemment pas indispensable, mais doit faciliter le travail du candidat*).

2.b. Montrer que le point N ne peut être atteint par le projectile s'il est situé en dessus d'une courbe (appelée courbe de sureté) dont on donnera une équation du type $Z = f(X)$. Tracer l'allure de cette courbe et identifier sa nature.

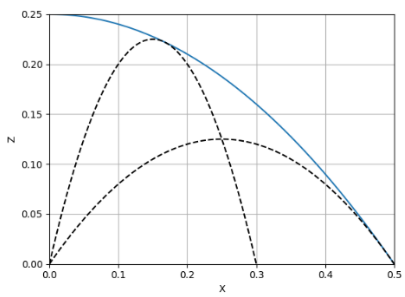
L'équation obtenue à la question précédente, soit $X'^2 tan^2\alpha_0 - X'\, tan\,\alpha_0 + (Z' + X'^2) = 0$ est une équation du second degré en $tan\alpha_0$. Pour que le point N ne puisse être atteint, il faut qu'aucune trajectoire ne passe par N, donc que aucune valeur (réelle) de $tan\,\alpha_0$ ne satisfasse cette équation, et par conséquent que son discriminant soit négatif.

(2 points)

On a alors : $\Delta = X'^2 - 4X'^2(Z' + X'^2) < 0$, soit $\frac{1}{4} < Z' + X'^2$ ou encore $Z' > \frac{1}{4} - X'^2$, et donc $Z > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}X^2$.

Ainsi la courbe de sureté a pour équation $Z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}X^2$ (2 points)

c'est une parabole (0,5 point) -avec sommet vers le haut- (*d'ailleurs on l'appelle parabole de sureté, ce que je ne pouvais pas écrire sans donner la réponse à la question !*). (Courbe = 1,5 points)



Sur la figure, la courbe de sureté est représentée en trait plein. Les deux trajectoires passant par le point N sont représentées en pointillés. On a pris $X' = \frac{1}{4}$ et $Z' = \frac{1}{8}$.

2.c. Montrer qu'un point N situé en dessous de la courbe de sureté peut être atteint par le projectile selon deux trajectoires différentes ; et dessiner qualitativement l'allure de ces deux trajectoires sur le schéma tracé à la question 2.b.
Montrer qu'il n'existe qu'une seule trajectoire permettant d'atteindre un point N situé sur la courbe de sureté.

Si N est en dessous de la « courbe » de sureté, $Z < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}X^2$, et le discriminant de l'équation du second degré en $tan\alpha_0$ est strictement positif ; cette équation a donc deux solutions distinctes, d'où deux trajectoires qui permettent d'atteindre N (une trajectoire type tir tendu, et une trajectoire type tir de mortier). (1 point)
Tracé des 2 trajectoires : 1 point

Si N est sur la « courbe » de sureté, $Z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}X^2$, et le discriminant est nul ; l'équation n'a donc plus qu'une seule solution. (1 point)

Dans tous les cas, les trajectoires sont tangentes à la courbe de sureté (qui est l'enveloppe de toutes les trajectoires possibles).

3. Bien entendu ces résultats ont toujours intéressé les pilotes d'avion et les artilleurs de DCA (Défense Contre Avion). Mais malheureusement ou heureusement (selon qu'on soit artilleur ou pilote), on ne peut négliger la résistance de l'air sur le projectile lancé par un canon : comme ce projectile est rapide, il en résulte une force de frottement dont le module est approximativement proportionnel au carré de sa vitesse. Sans aucun calcul, mais en s'aidant d'un schéma, expliquer qualitativement comment évolue la courbe de sureté si on prend en compte la résistance de l'air.

A partir de considérations énergétiques (le travail de la force de frottement est négatif), on comprend que, en présence de résistance de l'air, la courbe de sureté est plus basse (au grand bonheur des pilotes). Mais les artilleurs augmentent v_0. (1 point)

Notons que, en présence de résistance de l'air, la trajectoire du projectile n'est plus une parabole, par conséquent la courbe de sureté n'est plus une parabole (mais ça reste une courbe en cloche).