CORRIGE PROBLÈME 1 TS IPhO 2017

I. Loi de l'hydrostatique et principe du siphon

1) $\boxed{P_\mathrm{N} = P_\mathrm{M} + \rho g(z_\mathrm{M} - z_\mathrm{N})}$.

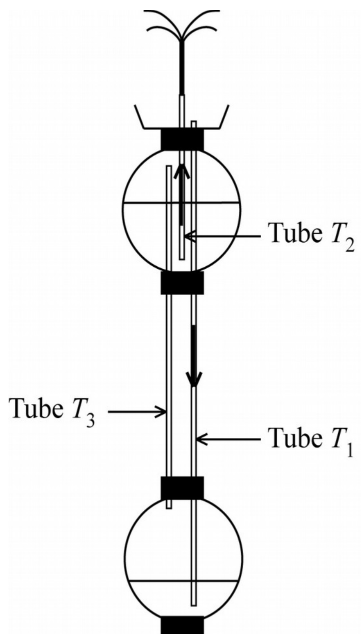
2) $\boxed{P_\mathrm{A} = P_0 + \rho g(z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A})}$.

3) On applique le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre A et B. On obtient alors : $\frac{P'_\mathrm{A}}{\rho} + \frac{1}{2}(v_\mathrm{A})^2 + g z_\mathrm{A} = \frac{P_\mathrm{B}}{\rho} + \frac{1}{2}(v_\mathrm{B})^2 + g z_\mathrm{B}$. Lorsque l'eau s'écoule, l'extrémité du tuyau en B est ouverte sur l'extérieur, donc $P_\mathrm{B} = P_0$. Par ailleurs, le débit entrant en A est le même que le débit sortant en B, donc $v_\mathrm{A} = v_\mathrm{B}$. On obtient alors : $\boxed{P'_\mathrm{A} = P_0 + \rho g(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})}$.

4) Pour que le siphon fonctionne, il faut que dès que l'on cesse de boucher l'extrémité du tuyau en B, l'eau soit aspirée en A. Pour cela, il faut que $\boxed{P'_\mathrm{A} < P_\mathrm{A}}$, et donc que $\boxed{z_\mathrm{B} < z_\mathrm{C}}$. Ainsi, si l'extrémité libre du tuyau (point B) est au-dessous du niveau de la surface de l'eau (point C), l'eau est aspirée au point A, puis s'écoule dans le tuyau : le siphon fonctionne.

II. Fontaine de Héron

5) La fontaine de Héron fonctionne comme un siphon, dans lequel le récipient du haut se vide dans celui du bas, par l'intermédiaire de deux tubes, qui jouent le même rôle que le tuyau : le tube T_2 correspond à la partie montante du tuyau et le tube T_1 à sa partie descendante.
On a indiqué par des flèches sur le schéma ci-contre le sens d'écoulement de l'eau dans les tuyaux T_1 et T_2.



6) Entre t et $t + dt$, le récipient du haut se vide d'un volume d'eau $dV = S|dz| = S\left|\frac{dz}{dt}\right|dt$, tandis que celui du bas se remplit d'un volume d'eau $dV' = S|dZ| = S\left|\frac{dZ}{dt}\right|dt$. L'écoulement étant stationnaire et incompressible, $dV = dV'$, si bien que : $\left|\frac{dz}{dt}\right| = \left|\frac{dZ}{dt}\right|$.
Comme $z(t)$ diminue et $Z(t)$ augmente, cela conduit à $-\frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{dt}$ et à $\frac{d(z+Z)}{dt} = 0$. Donc $z(t) + Z(t) = Cst$. On considère que toute l'eau est contenue dans les récipients du haut et du bas (on néglige le volume d'eau dans les tubes et la coupelle). Initialement : $z(0) + Z(0) = H$.
La relation est alors : $\boxed{z(t) + Z(t) = H}$.

Remarque : plus simplement, on peut écrire que le volume total d'eau se conserve. En négligeant le volume d'eau dans les tubes et la coupelle, on en déduit que $S z(t) + S Z(t) = V_{tot} = Cst$. Initialement, $V_{tot} = S H$. Donc $\boxed{z(t) + Z(t) = H}$.

7) On applique la loi de l'hydrostatique entre A' et l'extrémité supérieure du tube T_1, qui est à la pression P_0 : $\boxed{P_{\mathrm{A'}} = P_0 + \rho g(h_1 - Z)}$.

8)

a) On applique le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant, entre les points A et C : $\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}(v_A)^2 + g z_A = \frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2}(v_C)^2 + g z_C$.

On néglige la vitesse v_A devant v_C. L'extrémité du tube T_2 en C étant ouverte sur l'extérieur, on a : $P_C = P_0$. Et par ailleurs : $P_A = P_{A'} = P_0 + \rho g (h_1 - Z)$.

Donc : $\frac{P_0 + \rho g (h_1 - Z)}{\rho} + g z_A = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}(v_C)^2 + g z_C$ puis : $(v_C)^2 = 2g\,(h_1 - Z + z_A - z_C)$.

Or $z_A - z_C = z_A - z_B + z_B - z_C = z - h_2$. Donc : $\boxed{v_C(t) = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2 + z(t) - Z(t))}}$.

Comme $h_1 - h_2 + z - Z > h_1 - h_2 - H$ et que d'après les données $h_1 > h_2 + H$, la vitesse $v_C(t)$ est toujours définie.

b) À l'instant initial : $z = H$ et Z = 0. Donc $\boxed{v_C(t{=}0) = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2 + H)}}$.

À l'instant final, la fontaine s'arrête : $Z = H$ et z = 0. Donc $\boxed{v_C(t_{final}) = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2 - H)}}$.

Donc la vitesse $v_C(t)$ diminue au cours du fonctionnement de la fontaine.

9)

a) On applique le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant, entre les points C et D : $\frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2}(v_C)^2 + g z_C = \frac{P_D}{\rho} + \frac{1}{2}(v_D)^2 + g z_D$. Les points C et D sont à la pression atmosphérique : $P_C = P_D = P_0$. D étant en haut du jet d'eau, la vitesse de l'eau en D est nulle. On obtient alors : $\frac{1}{2}(v_C)^2 = g(z_D - z_C)$, puis $h = \frac{1}{2g}(v_C)^2$.

Finalement : $\boxed{h = h_1 - h_2 + z(t) - Z(t)}$.

b) À l'instant initial : $z = H$ et Z = 0. Donc $\boxed{h(t{=}0) = h_1 - h_2 + H}$.

À l'instant final, la fontaine s'arrête : $Z = H$ et z = 0. Donc $\boxed{h(t_{final}) = h_1 - h_2 - H}$.

Donc la hauteur du jet d'eau $h(t)$ diminue au cours du fonctionnement de la fontaine.

c) $h_{max} = h_1 - h_2 + H$ Et $h_{min} = h_1 - h_2 - H$, donc $\boxed{\langle h \rangle = h_1 - h_2 = 35 \text{ cm}}$.

d) Les phénomènes de dissipation (viscosité, pertes de charges, frottements dans l'air), n'ont pas été pris en compte dans notre modèle (en effet, l'application du théorème de Bernoulli suppose que l'on néglige ces phénomènes). Cela conduit à surestimer la hauteur moyenne du jet d'eau.

10) Application numérique : $\boxed{T = 830 \text{ s} = 13 \text{ min } 50 \text{ s}}$.

11) T augmente si S augmente, ou si s diminue.

$\sqrt{h_1 - h_2 + H}$ augmente avec H et $\sqrt{h_1 - h_2 - H}$ diminue avec H. Donc T augmente si H augmente.

Pour augmenter le temps de fonctionnement de la fontaine, on a donc intérêt à augmenter S et H (c'est-à-dire à augmenter la quantité initiale d'eau dans le récipient du haut), et à diminuer s (afin de diminuer le débit d'eau).