NOM Prénom Lycée

Problème 1 : « Tomber plus vite que la chute libre »

Nous savons tous qu'en l'absence de tout frottement aérodynamique, deux objets de masses différentes soumis à la gravité possèdent la même accélération : ils tombent en chute libre à la même vitesse. C'est pourquoi il est assez surprenant de voir certaines situations où une partie d'un objet tombe plus lentement ou plus vite qu'en chute libre. Dans ce problème nous proposons d'étudier une de ces situations.

Dans la mesure où on va s'intéresser à un solide en rotation autour d'un axe, on rappelle ici quelques éléments de mécanique du solide :

Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

Dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ (de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$) est décrit par le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\,L_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

où

L_Δ est le moment cinétique du solide autour de l'axe Δ, qui s'exprime sous la forme : $L_\Delta = J_\Delta\,\omega$ (où J_Δ est le moment d'inertie du solide autour de l'axe Δ, et ω la vitesse angulaire de rotation du solide autour de Δ)

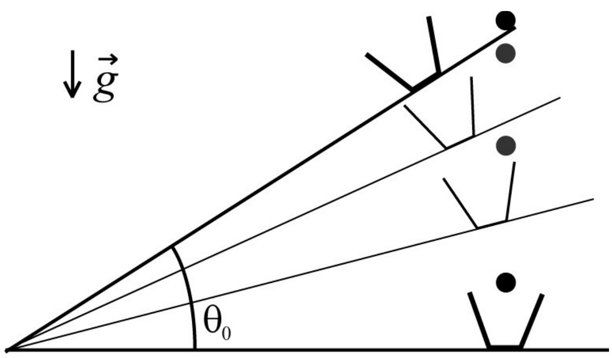
et

$\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext})$ la somme des moments par rapport à l'axe Δ des forces appliquées au solide.

Présentation de l'expérience

On considère le dispositif ci-dessous. Une planche de bois, rigide et homogène, est fixée à l'une de ses extrémités à un support fixe par une liaison pivot sans frottement. Elle tourne donc autour de l'axe horizontal Oz. À l'autre extrémité, un gobelet, de masse négligeable, est solidaire de la planche. Enfin, une bille est posée à l'extrémité de la planche, à côté du gobelet.

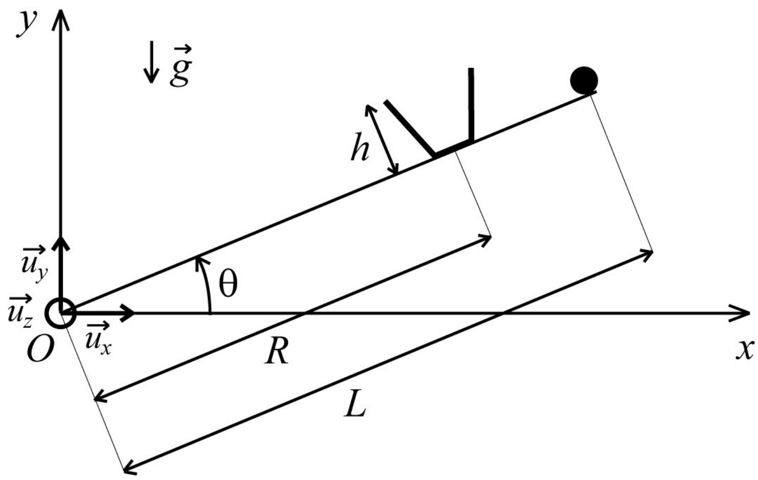
Initialement, la planche est immobile et inclinée par rapport au sol horizontal d'un angle θ_0. À l'instant $t = 0$, on lâche la planche sans lui communiquer de vitesse initiale. On observe alors que, sous certaines conditions expérimentales précisées dans ce problème, le gobelet tombe plus vite que la bille et vient se positionner sous cette dernière : la bille se retrouve alors à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol !



Le but de ce problème est d'expliquer ce phénomène, puis de déterminer les paramètres géométriques pertinents pour pouvoir réaliser cette expérience.

NOM Prénom Lycée

Les notations utilisées sont définies sur le schéma suivant. On prendra L = 1,0 m et θ_0 = 30°.



On note également :

- M la masse de la planche
- m la masse de la bille
- R la distance entre O et le centre du gobelet
- h la hauteur du gobelet
- J_{Oz} le moment d'inertie de la planche par rapport à l'axe (Oz) : $J_{Oz} = \frac{1}{3} M\, L^2$
- $\vec{g} = -g\,\vec{u}_y$ le champ de pesanteur supposé uniforme. On prendra g = 9,8 m.s^{-2}.

Le référentiel d'étude (R) sera supposé galiléen et on néglige les frottements de l'air.

1.1 Étude du mouvement de la planche

L'angle $\theta(t)$ nous permet de repérer la position de la planche au cours du temps. Le but est de déterminer l'équation différentielle vérifiée par cet angle.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à un axe que l'on précisera, exprimer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ de la planche en fonction de g, L et θ.

La planche est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

On applique le théorème du moment cinétique (TMC) à la planche, par rapport à l'axe (Oz) qui est fixe dans le référentiel d'étude (R) galiléen.

Le théorème s'écrit : $$\frac{d L_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\vec{F}_{ext})$$

où $L_{Oz} = J_{Oz}\omega = J_{Oz}\dot{\theta}$ *est le moment cinétique de la planche par rapport à (Oz) et* $\sum M_{Oz}(\vec{F}_{ext})$ *est la somme des moments, par rapport à l'axe (Oz), des forces extérieures s'exerçant sur la planche.*

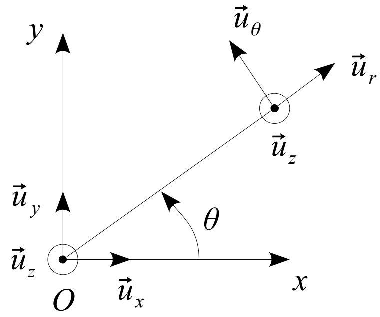
La planche est soumise à son poids (appliqué au centre de masse G de la planche) et à l'action de l'axe dont le moment par rapport à (Oz) est nul car la liaison pivot est parfaite.
Le moment du poids par rapport à l'axe (Oz) s'écrit :

NOM Prénom Lycée

$$M_{Oz}(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P})\cdot\vec{u}_z = (\overrightarrow{OG}\wedge M\,\vec{g})\cdot\vec{u}_z = (\frac{L}{2}\vec{u}_r\wedge(-Mg\,\vec{u}_y))\cdot\vec{u}_z = -\frac{MgL}{2}\cos\theta$$

En écrivant le TMC on obtient l'équation demandée : $\ddot{\theta}(t) = -\frac{3g}{2L}\cos\theta(t)$

2) Déterminer l'expression de l'accélération de l'extrémité droite de la planche dans le référentiel (R), notée $\vec{a}(L,t)$ dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, base que vous définirez sur un schéma, en fonction de *g, L,* $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et *θ*.



On travaille dans la base cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ *définie sur le schéma ci-contre.*

L'extrémité droite de la planche est repérée par son vecteur position $\overrightarrow{OL}(t) = L\vec{u}_r$ *.*

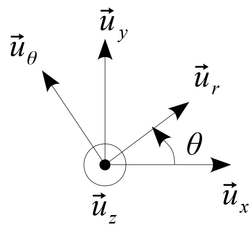
Sa vitesse est par définition : $\vec{v}(L,t) = \frac{d\,\overrightarrow{OL}}{dt} = L\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

Son accélération est : $\vec{a}(L,t) = \frac{d\,\vec{v}(L,t)}{dt} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r + L\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ *soit, d'après la question précédente :*

$$\vec{a}(L,t) = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r - \frac{3g}{2}\cos\theta(t)\vec{u}_\theta$$

3) En déduire alors l'expression de son accélération verticale initiale, notée $a_y(L,t=0)$, en fonction de *g* et θ_0.

L'accélération verticale initiale de l'extrémité droite de la planche est obtenue en projetant selon l'axe (Oy) l'accélération $\vec{a}(L,t=0)$ *.*



A l'instant initial, la vitesse angulaire est nulle $\dot{\theta}(t=0) = 0$ *donc l'accélération initiale de la planche est* $\vec{a}(L,t=0) = -\frac{3g}{2}\cos\theta_0\vec{u}_\theta$ *.*

On en déduit alors l'expression de l'accélération verticale initiale de la planche :

$$a_y(L,t=0) = -\frac{3g}{2}\cos^2\theta_0$$

4) Expliquer alors comment la bille peut tomber à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol. On s'intéressera en particulier à la nature du mouvement de la bille.

D'après la question précédente, l'accélération verticale initiale de l'extrémité droite de la planche vaut $a_y(L, t=0) = -\frac{3g}{2}\cos^2\theta_0$. *En considérant que l'angle d'inclinaison initial reste petit (voir question 8)), on peut écrire, au premier ordre :* $a_y(L,0) \simeq -\frac{3g}{2}$.

La norme de cette accélération verticale initiale est donc supérieure à g, qui est la norme de l'accélération verticale initiale de la bille.

En effet, cette dernière n'étant alors soumise qu'à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$, *le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille dans le référentiel (R) s'écrit :* $m\vec{a}_{bille}(t) = m\vec{g}$ *soit, en projection selon l'axe (Oy) :* $a_{y\,bille}(t) = -g$

L'extrémité droite de la planche a une accélération verticale supérieure à l'accélération verticale d'un objet en chute libre (la bille) : le gobelet tombe donc plus vite que la bille. C'est pourquoi il peut venir se positionner sous la bille qui tombe alors dedans !

1.2 Détermination des temps de chute de la bille et de la planche

5) L'altitude de départ de la bille est notée y_0.
   5.1) Déterminer l'expression de y_0. Faire l'application numérique.

Une relation de trigonométrie permet d'écrire $y_0 = L\sin\theta_0$.

Application numérique : $y_0 = 1{,}0 \times 0{,}5 = 50$ *cm.*

   5.2) Déterminer l'expression du temps de chute T_{bille} de la bille en fonction de g et y_0. Faire l'application numérique.

Le mouvement de la bille est une chute libre. Le PFD appliqué à la bille s'écrit (question 4) : $a_{y\,bille}(t) = \ddot{y}(t) = -g$.

Par intégration par rapport au temps on trouve : $\dot{y}(t) = -gt + \dot{y}(0)$ *avec* $\dot{y}(0) = 0$ *car l'ensemble est lâché sans vitesse initiale.*

En intégrant une nouvelle fois on obtient l'équation donnant la trajectoire de la bille : $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + y(0)$ *avec* $y(0) = y_0$.

Le temps de chute de la bille est donné par la résolution de $y(T_{bille}) = 0$ *soit :* $T_{bille} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$

Application numérique : $T_{bille} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}5}{9{,}8}} = 0{,}32\,s$

6) On s'intéresse maintenant au temps de chute de la planche, noté $T_{planche}$.

6.1) À partir de l'équation obtenue à la question 1), montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t) = \dfrac{d\theta}{dt}$ s'écrit :

$\dot{\theta}(t) = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}$.

La question 1) a permis d'établir l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t) = -\dfrac{3g}{2L}\cos\theta(t)$.

Pour déterminer la vitesse angulaire, on multiplie de part et d'autre de l'équation par $\dot{\theta}(t)$ *ce qui va nous permettre de faire apparaître des dérivées temporelles connues :*

$$\ddot{\theta}(t)\times\dot{\theta}(t) = -\frac{3g}{2L}\dot{\theta}(t)\times\cos\theta(t)$$

On réécrit cette égalité sous la forme $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2(t)\right) = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{3g}{2L}\sin\theta(t)\right)$ *puis on intègre par rapport au temps entre les instants* $t = 0$*, et* t *:*

$\displaystyle\int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(t)} d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t)\right) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\left(-\frac{3g}{2L}\sin\theta(t)\right)$ *soit encore :* $\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2(t) - \dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2(0) = \dfrac{3g}{2L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)$.

On sait qu'à l'instant initial la vitesse angulaire est nulle donc :

$\dot{\theta}^2(t) = \dfrac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)$ *soit* $\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{\dfrac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}$.

On remarque que dans ce problème la vitesse angulaire est négative (l'angle θ(t) diminue au cours du temps) donc on retient la solution négative et on a bien :

$$\dot{\theta}(t) = -\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}$$

6.2) En déduire l'expression du temps de chute de la planche sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

On vient de voir que la vitesse angulaire s'écrivait : $\dot{\theta}(t) = \dfrac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}$.

En utilisant la méthode de séparation des variables, on écrit : $\dfrac{d\theta}{\sqrt{\dfrac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}} = -dt$.

La durée de chute de la planche s'obtient en intégrant cette relation entre les instants t = 0 et t = $T_{planche}$ *:*

$\displaystyle\int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}} = -\int_0^{T_{Planche}} dt$ soit finalement : $\displaystyle T_{Planche} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta(t)\right)}}$

6.3) Pour $\theta_0 = 30°$ on donne $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin\theta_0 - \sin\theta)}} = 1{,}52$. Calculer la valeur numérique de $T_{planche}$.

D'après la question précédente : $T_{Planche} = \sqrt{\frac{L}{3g}} \times \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta(t)}}$.

Application numérique : $T_{Planche} = \sqrt{\frac{1{,}0}{3\times 9{,}8}} \times 1{,}52 = 0{,}28s$

7) Ces résultats sont-ils cohérents avec les observations ?

On trouve un temps de chute de la planche de 0,28 seconde et un temps de chute de la bille de 0,32 secondes. Ces résultats sont donc cohérents avec les observations : le gobelet tombe plus vite que la bille.

1.3 Détermination des paramètres permettant de « dimensionner » l'expérience

Plusieurs facteurs peuvent empêcher la bille de retomber à l'intérieur du gobelet. C'est en particulier le cas :

- si l'angle d'inclinaison initial de la planche devient « trop grand » *(condition 1)*
- si le gobelet est fixé sur la planche « trop loin » de la bille *(condition 2)*
- si la hauteur du gobelet est « trop importante » *(condition 3)*

Le but ici est d'essayer de quantifier ces paramètres.

Pour simplifier le problème, on considère que les dimensions caractéristiques du gobelet (sa largeur, ainsi que sa hauteur notée *h*) sont négligeables devant la longueur *L* de la planche, et on néglige la largeur du gobelet devant sa hauteur *h*.

8) *Condition 1 :* En vous aidant des résultats de la partie 1.1, déterminer la valeur de l'angle θ_0 maximale acceptable, notée θ_{0max}, pour que la bille retombe à l'intérieur du gobelet lorsque la planche touche le sol. Faire l'application numérique.

Dans la question 3), on a établit que l'accélération verticale initiale de la bille était $a_y(L, t=0) = -\frac{3g}{2}\cos^2\theta_0$.

Pour que la bille retombe à l'intérieur du gobelet, il faut qu'en valeur absolue cette accélération verticale initiale soit toujours supérieure à g. L'angle θ_{0max}, est donc donné par :

$$\frac{3g}{2}\cos^2\theta_{0max} = g$$

Ceci revient à écrire : $\cos\theta_{0max} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ *. On en déduit alors l'expression de θ_{0max},* $\theta_{0max} = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Application numérique : $\theta_{0max} = 35\,°$

Par la suite, on suppose que l'angle θ_0 reste inférieur à θ_{0max}.

9) *Condition 2 :* Par un argument purement géométrique, déterminer la distance R à laquelle il faut fixer le centre du gobelet pour que la bille, qui se trouve initialement à l'extrémité droite de la planche, tombe à l'intérieur du gobelet en fonction de L et θ_0. Faire l'application numérique.

La bille a un mouvement de chute libre vertical. Lorsqu'elle atteint le sol, elle se trouve à une distance $x_{bille} = L\cos\theta_0$ *de l'origine O. Si on veut que la bille tombe à l'intérieur du gobelet, il faut donc que ce dernier se situe à la même distance de l'origine O lorsque la planche est au sol. On doit donc avoir* $R = x_{bille}$.

Ainsi on doit fixer le centre du gobelet à la distance $R = L\cos\theta_0$.

Application numérique : $R = 0{,}87\,m = 87\,cm$.

On suppose maintenant que les conditions 1 et 2 sont vérifiées.

10) *Condition 3 :* On note h = 4 cm la hauteur du gobelet. Que doit-on vérifier pour pouvoir dire que la bille retombe à l'intérieur du gobelet à coup sûr ? Est-ce le cas ?

On suppose que la largeur du gobelet est négligeable devant sa hauteur. Dans ce cas, on peut dire que la bille retombe à l'intérieur du gobelet si, à l'instant où la planche touche le sol, l'altitude de la bille est supérieure à la hauteur h du gobelet. Ceci ce traduit par :

$$y_{bille}(T_{Planche}) \geq h$$

Nous avons établi l'expression de $y_{bille}(t)$ *à la question 5.2) :* $y_{bille}(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$.

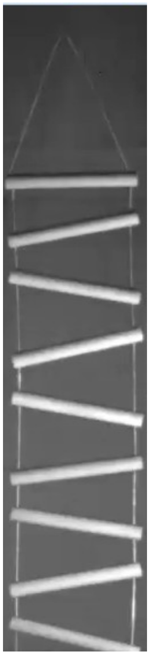
D'après cette expression, on a $y_{bille}(T_{Planche}) = y_0 - \frac{1}{2} g T_{Planche}^2 = 11\,cm$.

La hauteur du gobelet étant de 4 cm, la condition est bien vérifiée donc on est sûr que la bille retombe à l'intérieur.

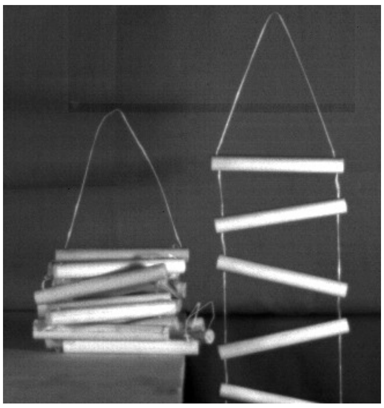
NOM Prénom Lycée

1.4 Chute d'une échelle à montant

On étudie maintenant la chute d'une échelle dont les montants sont constitués de cordes et les barreaux de planches inclinées successivement dans un sens et dans l'autre comme le montre la photographie ci-dessous.



On considère deux échelles identiques, situées initialement à la même altitude de départ et lâchées au même instant, sans vitesse initiale. L'échelle de gauche, contrairement à celle de droite, termine sa chute sur une table horizontale. La photographie ci-dessous montre les deux échelles vers la fin de la chute de l'échelle gauche.



En vous aidant des résultats établis dans la partie 1.1, expliquer qualitativement et de façon succincte les positions des deux échelles présentées sur cette photographie.

La photographie montre que l'échelle de gauche tombe plus vite que l'échelle de droite étant donné qu'au même instant, son sommet est plus bas. Cela se comprend bien au vu des résultats de la partie 1.1 dans laquelle on a montré que lorsqu'une planche était animée d'un mouvement de rotation autour d'une de ses extrémités fixe, l'autre extrémité tombait plus vite qu'en chute libre (si toutefois l'angle d'inclinaison n'était pas trop grand). Les échelles considérées ici sont des successions de planches peu inclinées. Pour l'échelle de gauche, à chaque fois qu'une extrémité d'un barreau touche la table, on est dans la situation de la partie 1.1 : l'extrémité du barreau qui n'est pas en contact tombe plus vite et tire l'échelle vers le bas. Cet effet s'additionne pour chaque barreau. Ainsi, lorsque la partie inférieure de l'échelle est en contact avec le sol, son sommet descend plus vite que si l'échelle était en chute libre.