NOM : PRENOM : LYCEE :

# 1 Problème 1 : Aller plus vite que le vent

Le vent arrière qui gonfle et pousse les voiles d'un bateau le propulse sur les flots sans jamais l'entraîner au-delà de sa propre vitesse. Pour aller plus vite que le vent, les voiliers doivent changer d'allure et prendre le vent de travers, "au largue" comme disent les marins, ou "au près" sur l'on veut remonter le vent. Mais ce n'est pas une fatalité dictée par les lois de la physique. En effet, d'ingénieux mécanismes permettent à des véhicules de tirer l'énergie du vent pour l'affronter de face ou pour aller plus vite que lui en se déplaçant exactement dans le même sens ! Ces engins, roulants mais non motorisés, ne sont pas mus par des voiles mais par des hélices. Comment fonctionnent-ils et quelles vitesses pourraient-ils atteindre ? C'est ce que nous allons voir dans ce problème.

## 1.1 Présentation du char à hélice

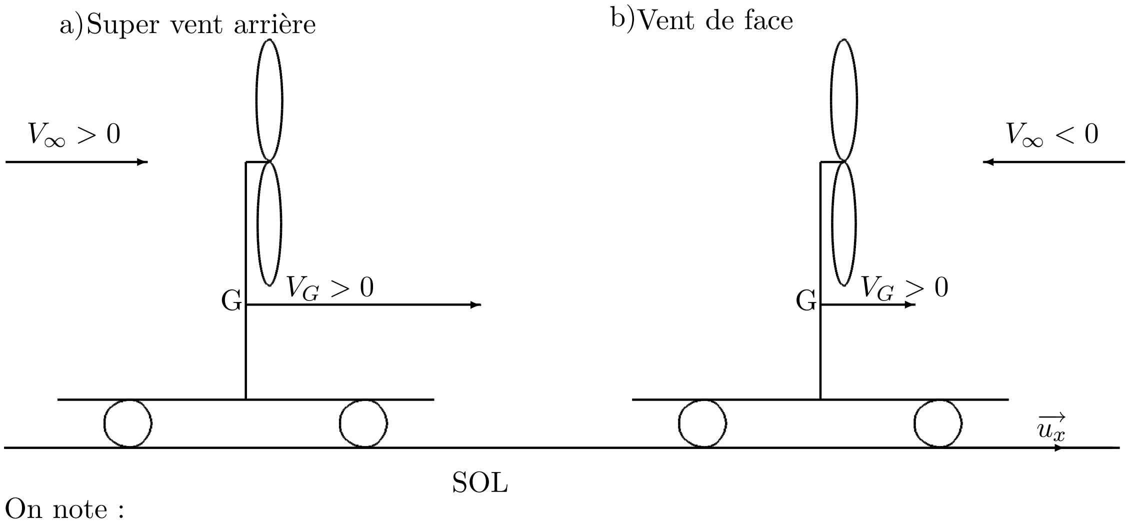
Un char à hélice est un véhicule à roue, sans moteur, possédant une hélice dont l'axe de rotation est solidaire à celui des roues par un système d'engrenages, c'est à dire que si l'hélice tourne à une certaine vitesse alors les roues tournent également à une vitesse dépendant des engrenages, et vice et versa.


Ce char peut avancer suivant deux configurations différentes :
- La première sera dénommée "face au vent" : le char à hélice est capable de déplacer face au vent, en remontant le vent.
- La deuxième sera dénommée "par super vent arrière" : le char à hélice est capable de se déplacer par vent arrière, avec une vitesse supérieure à la vitesse du vent par rapport au sol.

**Dans toute la suite du problème on se placera en régime stationnaire et à une dimension**.

Les deux référentiels envisagés sont le référentiel du sol noté R, et le référentiel du char noté R'. R est supposé galiléen, et R' est considéré en translation rectiligne uniforme par rapport à R.

Sur la figure suivante, est représenté schématiquement le char à hélice se déplaçant soit face au vent soit par supervent arrière.




On note :

- G le centre de gravité du chariot,
- $\overrightarrow{V_G} = V_G \overrightarrow{u_x}$ la vitesse du char à hélice par rapport au référentiel du sol R,
- $\overrightarrow{V_\infty} = V_\infty \overrightarrow{u_x}$ la vitesse du vent loin en amont du char, par rapport au référentiel du sol R,
- $\overrightarrow{V_v} = V_v \overrightarrow{u_x}$, la vitesse du vent au niveau de l'hélice par rapport à R,
- $\overrightarrow{F_{v/c}} = F_{v/c} \overrightarrow{u_x}$ la force exercée par le vent sur le chariot : c'est une force due à l'écoulement de l'air sur l'hélice notamment,
- $\overrightarrow{F_{s/c}} = F_{s/c} \overrightarrow{u_x}$ la force exercée par le sol sur le chariot : c'est une force de frottement solide qu'on ne cherchera pas à modéliser. On considérera qu'il n'y a pas de glissement.

Les composantes de ces vecteurs sont algébriques et donc peuvent être positives ou négatives selon les cas.

## 1.2 Etude cinématique

Dans cette partie, on ne considérera aucune autre force que $\overrightarrow{F_{v/c}}$ et $\overrightarrow{F_{s/c}}$.

1- En vous plaçant dans le référentiel du char, noté R', redessiner les schémas a) et b) du char et déterminer la vitesse du sol dans R', noté $\overrightarrow{V'}_{sol} = V'_{sol} \overrightarrow{u_x}$ et la vitesse du vent loin du char dans R', notée $\overrightarrow{V'}_\infty = V'_\infty \overrightarrow{u_x}$.

*dans les deux cas : vitesse du vent par rapport au char : $(V_\infty - V_G)\overrightarrow{u_x}$*
*vitesse du sol par rapport au char : $-V_G \overrightarrow{u_x}$*

*La différence c'est que dans le cas a le vitesse du sol est plus grande en norme que la vitesse du vent, et c'est l'inverse dans le cas b.*

Dans la suite, les grandeurs exprimées dans R' seront toujours notées avec un '.

2- En régime stationnaire, déterminer une relation entre la force exercée par le vent sur le char et la force exercée par le sol sur le char.

*On applique le principe fondamental de la dynamique (ou la statique ici) au char dans R' :*
$\overrightarrow{F_{v/c}} + \overrightarrow{F_{s/c}} = \overrightarrow{0}$

3- Pour chaque cas a) et b), dire quelle vitesse dans R' est la plus grande en norme : celle du vent loin du char, ou celle du sol ? On pourra compléter pertinemment les schémas demandés à la question 1.

*déjà répondu à la question 1.*

Dans le référentiel R', on introduit un facteur k défini comme le rapport des composantes de la vitesse du vent au niveau de l'hélice, notée $\overrightarrow{V'}_v = V'_v \overrightarrow{u_x}$ par la vitesse du vent loin, en amont de l'hélice. k est donc un réel positif ou négatif et est défini par la relation :

$$k = \frac{V'_v}{V'_\infty} \tag{1}$$

4- Rappeler le lien entre puissance et force. Pourquoi est-il important de préciser le référentiel d'étude dans l'expression de la puissance ?

$P_{F/R} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}_{/R}$ *; la puissance dépend du référentiel dans lequel on exprime la vitesse.*

5- Exprimer la puissance échangée, dans R', entre le sol et le char d'une part, et entre le vent et le char d'autre part.

*Dans le référentiel R' la puissance de la force s'exerçant du sol sur le char est* $P'_{v/c} = \overrightarrow{F_{s/c}}.\overrightarrow{V'_{s/c}}$ *; et la puissance de la force s'exerçant du vent sur le char vaut* $P'_{v/c} = \overrightarrow{F_{v/c}}.\overrightarrow{V'_{v/c}}$

6- Pour chaque cas a) et b) et en s'aidant notamment des questions 3 et 5, déterminer si le transfert énergétique se fait du sol vers le vent (ou l'air) ou l'inverse. En déduire alors pour chaque cas, si k<1 ou k>1. Cela correspond-t-il à une hélice motrice (propulsive) ou à une hélice éolienne (moulin à vent) ?

*Dans le cas a, la vitesse du sol par rapport au sol est plus grande en norme que la vitesse du vent au sol ; donc comme les forces sont égales en norme, il est possible de récupérer plus d'énergie du sol que du vent. Le transfert énergétique va donc se faire du sol vers l'air (ou le vent). Cela a comme conséquence que le vent est accéléré au niveau de l'hélice : donc k est supérieur à 1 dans le cas a. L'hélice est donc motrice. Par le même raisonnement, on montre que le cas b correspond à un facteur k inférieur à 1 ; et l'hélice fonctionne en éolienne.*

7- A partir de la question précédente, déterminer le sens des vecteurs $\overrightarrow{F_{v/c}}$ et $\overrightarrow{F_{s/c}}$, en précisant le signe de leur composante sur $\overrightarrow{u_x}$. En déduire, dans R', l'expression et le signe de la puissance échangée entre le vent et le char.

En convention moteur mécanique (i.e. vitesse et force orientés conventionnellement suivant le même vecteur ici $u_x$ ; une puissance positive correspond à un fonctionnement moteur, et une puissance négative correspond à un fonctionnement frein.

*Dans le cas a, l'hélice est motrice, donc la force du vent sur le char est suivant $+\overrightarrow{u_x}$. La puissance échangée entre le vent et le char est égale au produit scalaire de la force exercée par le vent sur le char et la vitesse du vent par rapport au char (qui est sur $-\overrightarrow{u_x}$) : donc la puissance est négative.*
$P'_{v/c} = F_{v/c} \cdot k(V_\infty - V_G) < 0$
*Ici il faut bien comprendre que la vitesse du vent au niveau de l'hélice n'est pas celle du vent loin de l'hélice.*

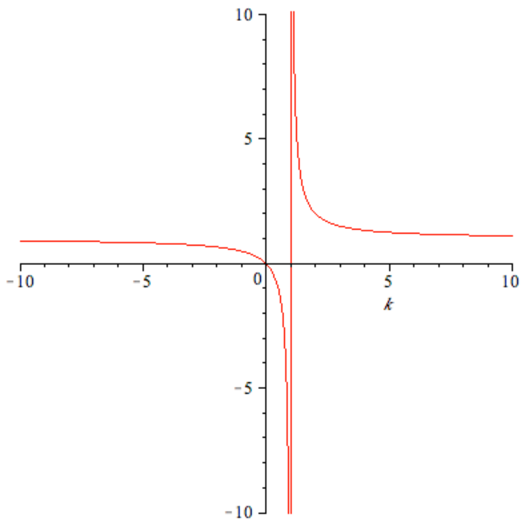
8- En l'absence de toute perte énergétique, en régime stationnaire et dans R', déterminer une relation supplémentaire entre $\overrightarrow{F_{v/c}}$, $\overrightarrow{F_{s/c}}$, $\overrightarrow{V_G}$ et $\overrightarrow{V_v}$.
*Conservation de l'énergie appliquée au char :* $P'_{v/c} + P'_{s/c} = 0$

9- Montrer que

$$\frac{V_G}{V_\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \tag{2}$$

*La conservation de la puissance permet d'écrire :* $F_{v/c} \cdot k(V_\infty - V_G) + F_{s/c} \cdot (-V_G) = 0$ *et par égalité des forces on retombe sur la relation proposée.*

10- Tracer ce rapport en fonction de k. Identifier trois zones de fonctionnement du char. On mettra en relation ces zones avec le mode de fonctionnement de l'hélice : éolienne ou hélice propulsive.




*La zone k négative correspond au vent arrière classique, la vitesse du char ne peut pas* *être supérieure à celle du vent. La zone k comprise entre 0 et 1 correspond au cas b, i.e. au vent de face, puisque le rapport* $\frac{V_G}{V_\infty}$ *est négatif ; et on peut aller plus vite que le vent ! ! Ici l'hélice fonctionne en éolienne et c'est le sol qui est moteur comme un tapis roulant. La zone k comprise entre 1 et l'infini correspond au cas a, i.e. au super vent arrière ; puisque le rapport* $\frac{V_G}{V_\infty}$ *est positif : et on peut aller plus vite que le vent. Ici l'hélice est motrice.*

11- Y a-t-il des zones où il n'y a pas de vitesse limite au char à hélice ? Est-ce que cela vous choque ? Pourquoi ?

*voir réponse précédente*

12- Comment le char à hélice peut-il concrètement atteindre une des zones caractérisée par vitesse supérieure à celle du vent ?

*il faut fabriquer une hélice avec un k donné. Cela se réalise en modifiant notamment l'angle d'attaque des pales défini comme l'angle entre le plan de rotation des pales et le plan d'une pale.*

13- Quel problème spécifique se pose si l'on veut atteindre le super-vent arrière ?

*Le problème ici est de pouvoir lancer correctement le char, d'abord par vent arrière, avec une voile peut-être puis il faut tourner brusquement en changeant le sens des engrenages pour passer en super vitesse par vent de face*

14- Comment modifier le paramètre k ? Peut-on avoir k=0 ? Comment ? Peut-on avoir k tendant vers $+\infty$ ? Comment ?

*Question hors barème - trop compliqué et technique.*

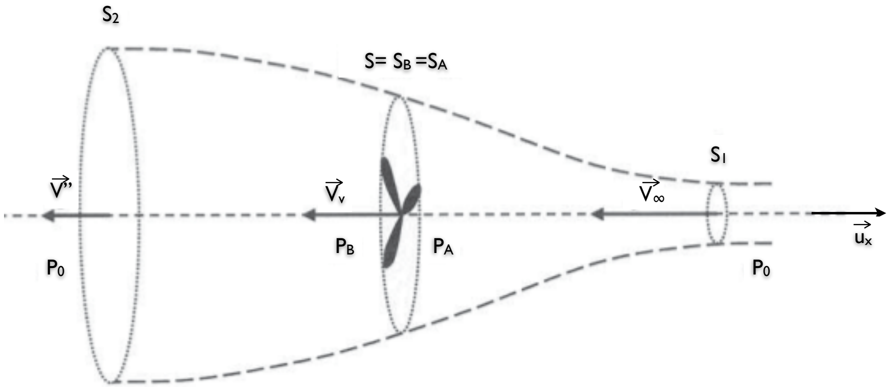
## 1.3 Etude de l'écoulement autour de l'hélice

Pour comprendre comment fixer le paramètre k, et comment maitriser le transfert énergétique du sol au char ou du vent au char, il faut étudier l'écoulement de l'air autour de l'hélice. On supposera que l'air est un fluide parfait (donc non visqueux), en écoulement stationnaire (les champs scalaires et vectorielles ne dépendent pas du temps) et incompressible (la masse volumique de toute particule de fluide reste constante au cours de son mouvement).

### 1.3.1 Détermination de la force exercée par le vent sur l'hélice

On considère dans cette partie que le chariot est immobile. Dans ce cas uniquement, on a alors R=R'.

Sur le schéma suivant est dessiné un tube de champ de vitesse de l'écoulement de part et d'autre de l'hélice, dans le cas d'une hélice en fonctionnement "éolienne" ou moulin à vent.




On note :
- $\overrightarrow{V_\infty}$ la vitesse du vent dans R loin en amont de l'hélice,
- $\overrightarrow{V_v} = k \cdot \overrightarrow{V_\infty}$ la vitesse du vent dans R au niveau de l'hélice,
- $\overrightarrow{V''} = \widetilde{k} \cdot \overrightarrow{V_\infty}$ la vitesse du vent dans R loin en aval de l'hélice,
- $P_0$ la pression atmosphérique,
- $P_A$ la pression un peu avant l'hélice,
- $P_B$ la pression un peu après l'hélice.

Les coefficients k et $\widetilde{k}$ sont reliés par la relation suivante :

$$\widetilde{k} = 2k - 1 \tag{3}$$

15- Montrer que la vitesse au niveau de l'hélice est égale à la moyenne (arithmétique) des vitesses amont et aval.

$V'' + V_\infty = (\tilde{k} + 1)V_\infty = (2k - 1 + 1)V_\infty = 2 * V_v$

16- L'écoulement étant incompressible, on peut montrer qu'il y a conservation du débit volumique à travers un tube de champ. En déduire l'expression de S et $S_2$ en fonction de $S_1$, et k.

$S_1 * V_\infty = S * V_v = S_2 * V''$ *d'où* $S_1 = S * k = S_2 * \tilde{k}$

17- Rappeler comment s'écrit la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait stationnaire et incompressible.

*Pour un écoulement P.S.I le long d'une ligne de champ on a* $P/\rho + gz + 1/2v^2 = cste$

18- Appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant d'une part sur la partie de l'écoulement à gauche de l'hélice et, d'autre part sur la partie à droite de l'hélice. Pourquoi ne peut-on pas appliquer cette relation sur une ligne de courant traversant l'hélice entre les points A et B ?

*On a d'une part* $P_0 + 1/2\rho V_\infty^2 = P_A + 1/2\rho V_v^2$ *et d'autre part* $P_B + 1/2\rho V_v^2 = P_0 + 1/2\rho V''^2$. *On ne peut pas appliquer la relation entre A et B car entre A et B l'écoulement n'est certainement plus ni incompressible ni parfait : le travail des forces internes de pression et/ou de viscosité ne sont pas négligeables*

19- A partir des deux relations précédentes faisant intervenir $P_A$ et $P_B$, déterminer l'expression de la force exercée par l'air sur l'hélice. L'exprimer uniquement en fonction de $\rho$, S, $V_\infty$ et k.

$F = (P_A - P_B)S = 1/2\rho(V_\infty^2 - V''^2)S = 2\rho S V_\infty^2 k(k-1)$ *orienté suivant* $\overrightarrow{u_x}$

20- D'après les données numériques suivantes (surface apparente de l'hélice 3 $m^2$, $\rho$ =1,28 $kg.m^{-2}$, $k = 0,8$, $V_0$ =60 $km.h^{-1}$), déterminer la puissance transférée du vent à l'hélice.

$P = -F.kV_\infty = 4,55kW$

21- Pour un chariot de masse totale 100 kg, en supposant que les résultats précédents restent valables en régime instationnaire, déterminer la durée qu'il faut au chariot pour passer de 0 à 100 km/h. Commentaires sur ce char.

$\Delta t = \frac{1/2mV_{100}^2}{P} = 8,5s$... *une voiture de course c'est 4s, c'est donc presque un char de course... Il est clair que la puissance est modifiée à mesure que le véhicule augmente sa vitesse.*

### 1.3.2 Rendement d'une éolienne

On peut montrer, grâce à la partie précédente, que la puissance échangée entre l'air et l'hélice dans le cas où l'hélice fonctionne en éolienne, s'exprime ainsi :

$$P = -2\rho S V_\infty^3 k^2(1-k) \tag{4}$$

22- Le mode de fonctionnement de l'hélice en tant qu'éolienne correspond à un facteur k compris entre 0 et 1. Pour cet intervalle, montrer qu'il existe une valeur de k comprise entre 0 et 1 permettant d'obtenir une puissance maximale.

*Il suffit de tracer P en fonction de k pour s'en rendre compte. En dérivant P par rapport à k et en cherchant la valeur de k annulant P, on trouve* $(2k(1-k)-k^2)=0$ *soit* $k=\frac{2}{3}$

Dans le cas où le chariot est immobile, cette limite est connue sous le nom de limite de Betz.

23- Si le chariot n'est plus immobile et se déplace à la vitesse $V_G$ comme dans la partie 2, déterminer la nouvelle expression de la puissance échangée entre l'air et l'hélice, dans R', uniquement en fonction de $\rho$, S, $V_\infty$, et k.

*Dans R' la vitesse du vent loin du char vaut* $V_\infty - V_G$*. Dans ce cas la puissance dans R' vaut* $P' = -2\rho S(V_\infty - V_G)^3 k^2(1-k)$*, et comme* $V_G = \frac{k}{k-1}V_\infty$ *on obtient au final* $P' = -2\rho S\frac{k^2}{(1-k)^2}V_\infty^3$.

24- Proposer une explication au fait que, malgré l'existence de cette limite, le char à hélice n'a lui pas de vitesse limite dans le mode de fonctionnement de l'hélice-éolienne.

*L'expression précédente de P' permet de conclure mathématiquement en faisant tendre k vers 1. Physiquement, il semblerait que l'on puisse prélever à chaque instant de l'énergie du vent, en considérant un tube de champ de plus en plus grand !*